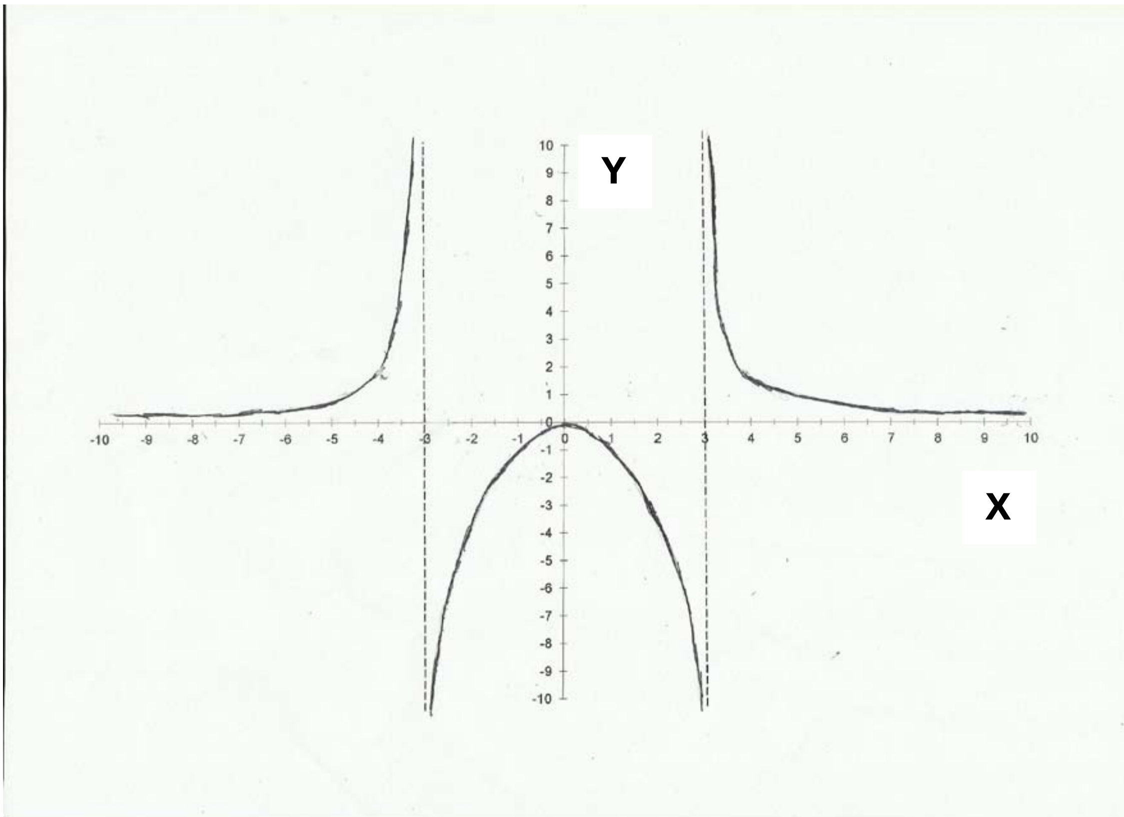
Opción A

1..- Hacer un esquema de la gráfica de una función **f(x)** que cumpla las siguientes propiedades
a) Tiene dos asíntotas verticales **x = -3** y **x = 3**
b) Para $x \to \pm\infty$ se cumple **f(x) = 0**
c) $f(4) = f(-4) = \dfrac{25}{16}$
d) Es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y decreciente en $(0, 3) \cup (3, \infty)$
e) $f(0) = f'(0) = 0$



2.- De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15, halla las dimensiones del que tiene área máxima
Llamando **a** y **b** a los dos catetos

$$\begin{cases} a + b = 15 \Rightarrow b = 15 - a \\ A = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (15 - a) = \frac{1}{2} \cdot (15a - a^2) \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = \frac{1}{2} \cdot (15 - 2a) \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot (15 - 2a) = 0 \Rightarrow 15 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{2} \Rightarrow A'' = \frac{d^2 A}{da^2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{15}{2} \\ b = 15 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

3.- Estudiar para que valores de **m** es invertible la matriz siguiente: $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$ y, en caso de ser posible, hallar su inversa para **m = -1**

Una matriz es invertible siempre que su determinante no sea nulo. Llamando **A** a la matriz dada

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = m^2 - m \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow (m-1)m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{0\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow (Existe) \exists A^{-1}$$

$$Si\ m = -1 \Rightarrow |A| = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (adj\ A^t) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+mz-3=0$, estudiar la posición relativa de la recta **r** y el plano π según los valores del parámetro m, hallar también el punto de intersección de la recta **r** y el plano π en el caso de **m = 1**

La recta y el plano pueden ser paralelos, contenida la recta en el plano o cortarse, si son paralelos o coincidentes sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo entonces tendremos que hallar si un punto R cualquiera de la recta pertenece al plano porque de ser así la recta esta contenida en el plano, de no serlo se cortan.

$$-y+2z-1=0 \Rightarrow y=-1+2z \Rightarrow x+2z-1+z-1=0 \Rightarrow x+3z-2=0 \Rightarrow x=2-3z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(2\ ,1\ ,m) \\ \overrightarrow{v_r}=(-3\ ,2\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(2\ ,1\ ,m)\cdot(-3\ ,2\ ,1)=-6+2+m=m-4 \Rightarrow Si\ \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow m-4=0 \Rightarrow$$

$$m=4 \Rightarrow (Para\ todo)\forall m \in \Re-\{4\} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r} \neq 0 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ se\ cortan$$

$$Para\ m=4 \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x+y+4z-3=0 \\ R(2\ ,-1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 2-1+4\cdot 0-3=0 \Rightarrow 3-3=0 \Rightarrow La\ recta\ r\ está\ contenida$$

$$en\ el\ plano\ \pi$$

$$Si\ m=1 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \pi \equiv 2x+y+z-3=0 \\ R(2-3\lambda\ ,-1+2\lambda\ ,\lambda) \end{cases} \Rightarrow 2\,(2-3\lambda)+(-1+2\lambda)+\lambda-3=0 \Rightarrow 4-6\lambda-1+2\lambda+\lambda-3=0$$

$$-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow R\begin{cases} x=2-3\cdot 0 \\ y=-1+2\cdot 0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow R(2\ ,-1\ ,0)$$

Opción B

1..- Dada la función **f(x)** definida por $f(x)=\begin{cases} sen\ x & (x<0) \\ -x^2+ax+b & (x\geq 0)\end{cases}$ determinar los valores de **a** y **b** para que resulte derivable en todos los puntos en donde está definida

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = sen\ 0 = 0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -0^2+a\cdot 0+b=b \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x) = b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow b=0$$

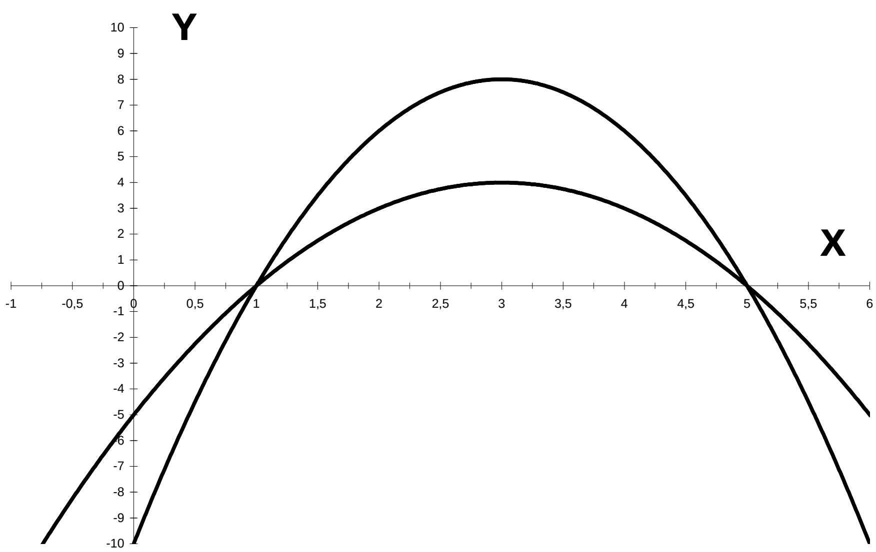
$$f'(x)=\begin{cases} cos\ x & (x<0) \\ -2x+a & (x>0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = cos\ 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2\cdot 0+a=a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \Rightarrow a=1$$

2.- Dadas las funciones: **f(x) = -2x^2 + 12x - 10** y **g(x) = -x^2 + 6x – 5**, se pide:

a) Representar el recinto limitado por la gráfica de ambas funciones

b) Calcular el área de dicho recinto

a)



$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow -2x^2+12x-10=-x^2+6x-5 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6+4}{2}=5 \\ x=\dfrac{6-4}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=\int_1^5 \left(-2x^2+12x-10\right)dx-\int_1^5\left(-x^2+6x-5\right)dx=\int_1^5\left(-x^2+6x-5\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^5+6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^5-5\cdot\left[x\right]_1^5$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^5+6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^5-5\cdot\left[x\right]_1^5=-\frac{1}{3}\cdot\left(5^3-1^3\right)+3\cdot\left(5^2-1^2\right)-5\cdot(5-1)=-\frac{124}{3}+72-20$$

$$A=52-\frac{124}{3}=\frac{156-124}{3}=\frac{32}{3}\ u^2$$

3.- Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro **m** y resolverlo para **m = 2** $\begin{cases} x+my-z=1 \\ 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=m-1 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1-m+2+1-m+2=-2m+4 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -2m+4=0 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=\frac{4}{2}=2$$

$$\forall m \in \Re-\{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ tercera\ es\ combinación\ lineal\ de\ las\ otras$$

$$dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$-y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x+0-z=1 \Rightarrow x=1+z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=(1+\lambda\ ,0\ ,\lambda)$$

4.- Obtener la ecuación del plano paralelo a las dos rectas siguientes $r_1 : \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ y $r_2 : \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$ y que pasa por el punto **(1 , 1 , 2)**

El vector director del plano π es perpendicular a los vectores directores de las rectas, lo hallaremos calculando el producto vectorial de estos dos últimos vectores.
Una vez localizado el vector director del plano este es perpendicular al vector formado por el punto dado **P** y el punto **G** genérico del plano y por lo tanto su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$x+4z=-1 \Rightarrow x=-1-4z \Rightarrow -(-1-4z)+y+3z=1 \Rightarrow y+1+7z=1 \Rightarrow y=-7z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}}=(-1\ ,1\ ,2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(-4\ ,-7\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_{r_1}} \times \overrightarrow{v_{r_2}}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-8\vec{j}+7\vec{k}+4\vec{k}+14\vec{i}+\vec{j}=15\vec{i}-7\vec{j}+11\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(15\ ,-7\ ,11) \\ \overrightarrow{PG}=(x\ ,y\ ,z)-(1\ ,1\ ,2)=(x-1\ ,y-1\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(15\ ,-7\ ,11)\cdot(x-1\ ,y-1\ ,z-2)=0 \Rightarrow 15\cdot(x-1)-7\cdot(y-1)+11\cdot(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 15x-7y+11z-30=0$$